

PENURUNAN PERSAMAAN ST. VENANT UNTUK DASAR BERBAGAI KASUS DINAMIKA FLUIDA

N. Widiasmadi ^{*})

Abstract

The shallow water wave's equation represents rapid unsteady flow frequently attended by shock waves. For shock phenomena, the influence of bottom friction may be assumed marginal, as the bottom width where shock arises is relatively very thin compared to the scale of the flow domain. However, the energy loss across the shock is significant. This energy loss is attributed to the internal stresses within the very thin infinitesimal shock interface. For practical computation, the contribution of the internal friction may be incorporated in the wall friction, in other words the internal stresses can be represented as Manning frictional resistance. Frictions either wall friction, surface friction, or internal friction between fluid particles are the sources or sinks of momentum.

Strong simplification of modeling of the free surface shallow flows is necessary for the computer simulation. The material on the basis of shallow water models is essential, even considering a numerical method of any kind, similar to most of the shock-capturing numerical methods on the utilisation of local Riemann problem solution, both for the exact or approximate. However the role of the Riemann problem is wider. The Riemann problem can be useful in theoretical studies of simple shallow water models; it can also be used in conjunction with other numerical solution. This research deals with shock-capturing, finite volume numerical methods, particular devoted to the details of numerical methods of the shock-capturing type. Some hypothetical tests are modeled as a shallow water wave equation, which therefore can be cast as Riemann Problem, solved by utilizing the Godunov's type solution. Finite volume methods of the Godunov type are used for the purpose of solving numerically the time-dependent, non-linear shallow water equations.

Key words : *shallow water, homogeneous, shock, sources, sinks, Riemann problem, finite volume, shock-capturing, Godunov's type.*

PENDAHULUAN

Persamaan pengaturan dari model fisika aliran tak mampat, dengan permukaan terbuka dan aliran mulus (*smooth flow*) adalah St. Venant, dimana percepatan vertikal diabaikan yang menyiratkan agihan tekanan hidrostatis sepanjang kedalaman aliran dan permukaan yang datar dan mulus (*tanpa kejut*). Dari segi matematika, persamaan ini termasuk dalam kelompok persamaan diferensial terpilah harkat satu, hiperbolik nir lempang. Teknik penyelesaian kiwari (*contemporary*) adalah dengan cara numerik selisih hingga, unsur hingga dan volume hingga. Perbedaan dari ketiga pendekatan numerik akan dirangkum di bawah ini.

Pendekatan numerik selisih hingga (CSH), seluruh turunan-turunan kisaran-kisaran hidrodinamik (*derivatives of the hydrodynamic variabel*) dihipotesiskan oleh selisih hingga antara dua titik yang berdekatan dalam medan aliran. Hampiran ini dilakukan dengan memekarkan

(*expansion*) turunan kisaran dengan deret Taylor untuk nilai pada titik kisi ($i+l$) dengan mengacu pada nilai pada titik kisi i . Titik-titik ini dibentuk oleh kisi-kisi di dalam ruang fisik aliran. Hampiran CSH telah merupakan unggulan dalam komputasi hidrodinamika.

Hampiran dengan cara unsur hingga (*finite element method*) dimana tatar-aliran (*flow domain*) dikepingkan menjadi unsur-unsur hingga (*finite element*) yang tumpang tindih dan rapat (tidak bercelah) dan persamaan St. Venant diberlakukan untuk setiap unsur hingga. Unsur-unsur hingga terdiri dari titik-titik unsur yang disebut simpul (*nodes*). Kisaran-kisaran hidrodinamik dan parameter aliran (kemiringan dasar saluran, kekerasan, dst) yang dikandung oleh persamaan diferensial diinterpolasikan untuk setiap titik dalam unsur dengan polinomial. Hasil interpolasi lempang atau kuadrat disebut fungsi rupa (*shape function*), fungsi coba (*trial function*), atau fungsi basis (*basis function*). Untuk aliran tiga matra, maka tatar aliran dikepingkan menjadi

^{*}) Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Wahid Hasyim Semarang
Jl Menoreh Tengah X/22 Semarang

unsur volume; untuk aliran dua-matra menjadi keping dua matra, dan untuk tatar aliran satu-matra. Kelebihan utama dari CUH adalah kemampuan untuk menangani batas yang tidak teratur (aliran dua matra) dan pemurnian kisi (*grid refinement*). Cara volume hingga, pada awalnya dikembangkan sebagai perluasan dari CSH, dimana volume hingga merupakan volume integrasi dari kemalaran dan momentum. CVH berbeda dengan cara-cara numerik lainnya, dimana dapat disimak dengan jelas azas kekekalan fisika dengan algoritma, dan karena itu mudah dipahami .

METODOLOGI

Fokus dari penelitian ini ada dua : pertama adalah pada penyertaan sumber, dan pengendalian algoritma di mana sumber dianggap kecil pengaruhnya dibandingkan dengan suku-suku lainnya dalam persamaan St. Venant yang dituangkan dalam bentuk konservatif, atau Riemann takubah semu. Suku sumber mengakibatkan persamaan pengatur tidak serbasama (*homogeneous*). Karena itu kehadiran sumber mengakibatkan bentuk persamaan divergen, tidak murni bentuk konservatif. Untuk menggunakan penyelesaian Riemann, maka persamaan yang tak serbasama ini terlebih dahulu harus dilintasbentuk menjadi serbasama, a.l. dengan memisalkan suku sumber tetap, yang nilainya diperoleh dari penyelesaian waktu yang barulalu. Tetapi karena matrix Jacobi A tidak simitri , maka pelintasbentukan ini merupakan suatu soal yang menarik yang belum ada yang mencobanya.

Selanjutnya untuk geometri yang tidak teratur, program pembangkitan kisi (*grid generation*) yang merupakan sub-program dalam cara dalam unsur hingga dapat digunakan bila hitungan berbaris volume hingga. Karena penyelesaian Riemann dengan teknik Godunov menjelaskan bahwa ketidakmulusan terjadi pada antarmuka dua unsur yang berdampingan, maka persamaan hiperbolik nir-serbasama (*inhomogeneous*) di mana sumber harus diperhitungkan dihilangkan dengan pelempangan lengkung karakteristik, maka simulasi menjadi perkiraan arus (*flux estimation*) melalui bidang antar muka sel yang pada gilirannya merupakan soal Riemann satu-matra.

Jadi seluruh penyelesaian hidrodinamika disederhanakan menjadi soal arus vector U melalui antarmuka sel-sel, mulus atau

tidak mulus! Dengan mengubah seluruh soal menjadi soal Riemann, maka kita perlu lagi memerlukan suku sumber yang mengandung gaya gravitasi dan gesekan, karena kita bekerja dengan rumusan ketakubahan Riemann (*Riemann invariants*). Semua model matematika yang tersedia hanya untuk alur prismatic. Alur sungai pada umumnya tidak prismatic, karena itu terlebih dahulu perlu direkayasa menjadi alur prismatic. Dari segi model matematika, alur prismatic dapat lebih mudah dimodelkan ketimbang yang tidak. Pengalaman membuktikan bahwa pemodelan alur prismatic cukup cermat. Bangunan-bangunan air yang merupakan syarat-batas-dalam (*internal boundary condition*), dari jaringan saluran yang bercabang-cabang atau melingkar, semua kerumitan geometri dan topologi sekarang dapat disederhanakan menjadi persoalan antar-muka yang dijabarkan menjadi soal Riemann satu matra.

Sehingga dalam penelitian ini akan dihasilkan berbagai pola aliran dengan hampiran Riemann yang sebelumnya diuji dengan bagan Upwind Godunov untuk :

- Aliran tunak dan tak tunak dalam suatu alur sungai dengan kondisi hidrograp yang diberikan.
- Aliran gelombang banjir mulus dan bandang

ANALISIS

Dengan berdasarkan hukum kekekalan momentum, untuk *aliran laminar*, Navier-Stokes membuat persamaan umum tiga dimensi yang dikenal dengan nama persamaan Navier-Stokes yang terdiri dari 3 persamaan momentum. Persamaan Navier-Stokes mempunyai 4 anu yaitu kecepatan, kearah sumbu x,y,z dan tekanan P . Dengan adanya tambahan persamaan kontinuitas maka di dapat 4 persamaan dan 4 anu. Secara matematis, persamaan Navier-Stokes dapat diselesaikan.

A. Hukum Kekekalan Massa

Bila laju perubahan massa fluida dalam suatu *volume tilik* persatuan waktu adalah sama dengan laju bersih dari fluida yang masuk melalui *permukaan tilik A* dimana :

V = volume tilik

A = permukaan tilik atau batas dari Ω

x_1 & x_2 = batas permukaan tilik

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} A dx$$



Persamaan 2.1 a merupakan perubahan massa fluida di dalam volume tilik . Laju bersih aliran fluida yang masuk ke dalam volume tilik melalui A adalah Q_{masuk} - Q_{keluar} atau dapat ditulis

$$Q_{masuk} - Q_{keluar} = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx$$

Sehingga persamaan untuk kekekalan massa adalah

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} A dx = - \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad \text{atau}$$

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} = - \rho \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Bentuk menerus dari persamaan hukum konservasi massa (persamaan kontinuitas adalah)

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{1.1.d}$$

B. Hukum Kekekalan Momentum

Bila laju perubahan momentum dalam volume tilik persatuan waktu sama dengan laju bersih dari aliran yang masuk ditambah gaya-gaya yang bekerja di dalam volume tilik dan pada permukaan tilik.

Momentum adalah aliran suatu massa atau mv ($=\rho v \cdot v$). Sedangkan aliran momentum dapat ditulis sebagai $mv \cdot v$ atau mv^2 ($\rho v \cdot v^2$).

Hukum kekekalan momentum dijelaskan sebagai laju perubahan momentum persatuan waktu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} m \cdot v dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho dA \cdot v dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho Q dx$$

Aliran yang masuk

$$M_{x-masuk} - M_{x-keluar} = \rho Q v_1 - \rho Q v_2$$

$$= - \int_{x_1}^{x_2} \rho Q \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

Gaya-gaya yang bekerja di dalam volume tilik dan pada permukaan tilik ada tiga, yaitu

gaya berat fluida W , gaya tekan P dan gaya geser F_τ

Gaya berat fluida (W) :

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho g A dx \sin \theta = \int_{x_1}^{x_2} \rho g A dx \left(- \frac{dz}{dx} \right)$$

Gaya tekan (P) :

Dapat dicari dengan asumsi bahwa distribusi tekanan hidrostatis dan percepatan vertikal diabaikan serta bentuk penampang persegi panjang dengan lebar B. Sehingga gaya tekan F akan didapat :

Gaya geser (Fτ) :

$$F_\tau = \int_{x_1}^{x_2} \tau_o p dx$$

dimana :

τ_o = tegangan geser pada dasar sungai

p = penampang basah sungai

Untuk kecepatan geser yang timbul maka :

$$u_*^2 = \frac{\tau_o}{\rho} = g R S_f$$

dimana :

u_* = kecepatan geser

R = jari-jari hidrolis = A/p

A = luas penampang melintang saluran

p = penampang basah saluran

S_f = kemiringan geser

Sehingga gaya geser sepanjang penampang basah sebagai

$$F_\tau = \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_f dx$$

Berdasarkan hukum kekekalan momentum maka dapat ditulis :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho Q dx = - \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial Qv}{\partial x} dx + \int_{x_1}^{x_2} \rho g A dx \left(- \frac{dz}{dx} \right) - \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial y^2}{\partial x} B dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_f dx \quad (l)$$

selanjutnya persamaan tersebut disederhanakan menjadi :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \frac{\partial Qv}{\partial x} + g A S_o - g \frac{B}{2} \frac{dy^2}{dx} - g A S_f$$

atau persamaan kekekalan momentum ditulis :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Qv}{\partial x} + g B y \frac{dy}{dx} - g A S_o - S_f = 0$$

Penggabungan Persamaan momentum dengan Persamaan kontinuitas merupakan persamaan dasar untuk saluran terbuka, dikenal dengan nama **Persamaan Saint Venant**, yang mana dapat menjadi suatu persamaan pengatur dalam analisa hidrodinamika aliran permukaan. Persamaan pengatur ini adalah persamaan klasik St. Venant, yaitu suatu persamaan diferensial terpilah derajat satu hiperbolik nir-lempang (*first order non-linear hyperbolic partial differential equation*).

Penyederhanaan persamaan kontinuitas dengan h sebagai elevasi air adalah :

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{2} \gamma y_1^2 B - \frac{1}{2} \gamma y_2^2 B = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \gamma \frac{\partial y^2}{\partial x} B dx$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial v h}{\partial x} = 0$$

Penyederhanaan persamaan momentum juga didapat :

$$\frac{\partial A v}{\partial t} + \frac{\partial A v^2}{\partial x} + g A \frac{dh}{dx} - g A (S_o - S_f) = 0$$

atau

$$A \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial v^2}{\partial x} + v^2 \frac{\partial A}{\partial x} + g A \frac{\partial h}{\partial x} - g A (S_o - S_f) = 0$$

atau

$$A \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial t} + 2vA \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 \frac{\partial A}{\partial x} + g A \frac{\partial h}{\partial x} - g A (S_o - S_f) = 0 \quad (q)$$

Selanjutnya persamaan ini dapat diatur lagi menjadi

$$v \frac{\partial A}{\partial t} + v^2 \frac{\partial A}{\partial x} + vA \frac{\partial v}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial t} + vA \frac{\partial v}{\partial x} + gA \frac{\partial y}{\partial x} - gA (S_o - S_f) = 0 \quad (r)$$

$$v \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial x} \right) + A \frac{\partial v}{\partial t} + vA \frac{\partial v}{\partial x} + gA \frac{\partial y}{\partial x} - gA (S_o - S_f) = 0 \quad (s)$$

$$v \underbrace{\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial v A}{\partial x} \right)}_{\text{kontinuitas}=0} + A \frac{\partial v}{\partial t} + vA \frac{\partial v}{\partial x} + gA \frac{\partial y}{\partial x} - gA (S_o - S_f) = 0 \quad (t)$$

Persamaan momentum menjadi

$$A \frac{\partial v}{\partial t} + Av \frac{\partial v}{\partial x} + gA \frac{\partial y}{\partial x} - gA (S_o - S_f) = 0 \quad (u)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} - g (S_o - S_f) = 0 \quad (v)$$

Persamaan diatas merupakan penyederhanaan Persamaan Saint Venant, yaitu dengan asumsi bahwa lebar penampang saluran adalah tetap. Yang mana merupakan dua persamaan dengan dua anu (v dan y), sehingga kedua persamaan diatas dapat diselesaikan.

PEMBAHASAN

Penyelesaian Riemann dengan teknik Godunov menjelaskan bahwa **ketidakmulusan sentuh** (*contact discontinuity*) terjadi pada antar muka dua unsur yang berdamangan, maka persamaan hiperbolik nir-serbasama (*inhomogeneous*) di mana sumber harus diperhitungkan dihilangkan dengan pelempeangan lengkung karakteristik, maka simulasi menjadi perkiraan arus (*flux estimation*) melalui bidang antar muka sel yang merupakan **soal Riemann satu-matra**. seluruh penyelesaian hidrodinamika disederhanakan menjadi soal arus vector **U** melalui antar muka sel-sel, mulus atau tidak mulus. Dengan mengubah seluruh soal menjadi soal Riemann, maka kita tidak perlu lagi memerlukan suku sumber yang mengandung gaya gravitasi dan gesekan, karena kita bekerja dengan **rumusan ketakubahan Riemann** (*Riemann invariants*). Dan kedua hasil baik dengan sumber ataupun tidak dapat kita lihat dengan perbedaan yang kecil dari setiap aplikasi model.

6.1. UJI NUMERIK

Tabel 1 Data Awal Uji Numerik

Uji	h_{ki}	v_{ki}	h_{ka}	v_{ka}	Letak Pintu ($X=0$)	Waktu
	(m)	(m/det)	(m)	(m/det)	(m)	(detik)
1	1,20	2,60	0,20	0,00	10,00	7,00
2	1,20	-6,00	1,20	6,00	25,00	3,00

Uji	h_{ki}	v_{ki}	h_{ka}	v_{ka}	Letak Pintu ($X=0$)	Waktu
3	1,20	0,00	1×10^{-7}	0,00	20,00	3,00
4	1×10^{-7}	0,00	1,20	0,00	30,00	3,00

Tabel 6.2. Hasil Perhitungan

Uji	h^* (m)	v^* (m/det)	$V_{x=0}$ (m/det)	$a_{x=0}$ (m/det ²)
1	0,86300000	3,6422000	3,1529000	3,1529000
2	0,01880000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
3	0,00095225	6,6654000	2,2862000	2,2862000
4	0,00095225	-6,6654000	-2,2862000	2,2862000

Panjang saluran untuk uji numerik adalah 50 meter dengan bentuk penampang prismatik, untuk keperluan pengepungan dibuat 50 ruang tilik (sel) dengan percepatan gravitasi sebesar $9,8 \text{ m/det}^2$. Untuk penyelesaian cara eksak ditetapkan batas toleransi (TOL) adalah 10^{-6} , proses iterasi dilakukan dengan jumlah maksimum adalah 50.

Pintu bendung sebagai sekat pemisah antara bagian hulu (kiri) pintu dan bagian hilir (kanan) pintu. Variasi Kedalaman hulu (H_{ki}) dibuat pada dua kondisi yaitu pada saat berair dengan kedalaman 1 meter dan tak berair (kering) dengan kedalaman 0 meter demikian juga pada kedalaman hilirnya (H_{ka}), data kedalaman selengkapnya dapat dilihat pada tabel 6.1.

6.1.1. Uji Pertama

Dalam Gambar uji pertama dihasilkan profil kedalaman dan kecepatan air. Perhitungan cara eksak menghasilkan kedalaman dan kecepatan pada bidang peralihan yang ditandai dengan notasi bintang (*), untuk kedalaman bintang (h^*) adalah 0,86300000 sedangkan kecepatan bintang (v^*) adalah 3,6422000.

Dari hasil perhitungan cara eksak muncul perambatan kejut yang cukup kuat terjadi pada sisi kanan dan perambatan mulus dengan kecepatan sonik (aliran kritik) pada sisi kiri. Peristiwa ini cukup penting dan menyiratkan bahwa nilai eigen $\lambda_1 = u - a$ akan berubah dari nilai negatif ke nilai positif yang ditandai dengan arah gerak perambatan gelombang dari sisi kiri melalui daerah peralihan ($x=0$) menuju ke sisi kanan, sehingga secara jelas perubahan ini akan membawa nilai eigen λ_1 melalui nilai nol pada posisi pintu bendung atau pada posisi peralihan dimana $x=0$ atau $\lambda_1 = u - a = 0$ yang dapat ditulis $u = a$, nilai tersebut pada tabel 3.2. dapat dilihat

besarnya kecepatan ($V_{x=0}$) dan percepatan ($a_{x=0}$) pada $x = 0$ adalah 3,1529000, hal ini berarti besar dan arah kecepatan partikel air sama dengan percepatannya.

6.1.2. Uji Kedua

Dalam Gambar uji kedua dihasilkan profil kedalaman dan kecepatan air. Perhitungan cara eksak menghasilkan kedalaman dan kecepatan pada bidang peralihan yang ditandai dengan notasi bintang (*), untuk kedalaman bintang (h^*) adalah 0,01880000 sedangkan kecepatan bintang (v^*) adalah nol. Dari hasil perhitungan cara eksak muncul perambatan gelombang mulus yang cukup kuat dengan arah yang berlawanan. Kedalaman pada daerah bintang (h^*) sangat tipis yaitu 0,040564.

Seperti halnya pada uji pertama diatas maka untuk perhitungan numerik ditinjau dengan dua kondisi, dimana tinjauan pertama faktor sumber disertakan sedangkan pada tinjauan kedua faktor sumber tidak disertakan. Faktor sumber dalam hal ini adalah gesekan air dengan menggunakan *angka manning* (Cn) yang terdapat pada dasar saluran, dimana nilai tersebut (Cn) juga diambil sebesar 0,003. Sedangkan kemiringan dasar saluran dibuat datar baik dengan dan tanpa melibatkan sumber. Untuk uji pertama dapat dilihat pada tabel hasil Uji numerik di lembar lampiran, secara umum akan didapat nilai uji numerik dengan dan tanpa sumber. Besar perbedaan rata-rata bagan numerik dengan dan tanpa melibatkan faktor sumber untuk uji pertama adalah 3×10^{-12} , dimana perbedaan tersebut bervariasi dari hulu sebesar $7,71 \times 10^{-12}$ menurun ketengah ($X=0$) pada posisi pintu bendung dengan perbedaan sebesar $1,7 \times 10^{-13}$ dan naik lagi kehilir dengan perbedaan yaitu $7,49 \times 10^{12}$ (lihat tabel pada lembar lampiran).

6.1.3. Uji Ketiga

Dalam Gambar uji ketiga dihasilkan profil kedalaman dan kecepatan air . Pada uji ketiga merupakan uji pada kondisi saluran kering pada sisi kanannya, yang mana penyelesaiannya terdiri dari gelombang mulus tunggal sisi kiri yang ditunjukkan oleh nilai eigen $\lambda_1 = u - a$. Dalam penyelesaian eksak gelombang yang muncul akan terlihat betul-betul mulus, namun dalam penyelesaian numerik agar model dapat dihitung maka dihindarkan kondisi kering mutlak (nol) atau paling tidak mempunyai nilai kedalaman walaupun sangat tipis sekali (0,0000001), sehingga secara teknis dalam perhitungan numeric akan muncul kejut walupun kecil sekali atau tidak semata-mata mulus dan ini sesuai dengan kondisi di alam bahwa kenyataannya tidak pernah ada aliran yang betul-betul mulus, sehingga akan muncul kejut walupun nilainya sangat kecil.

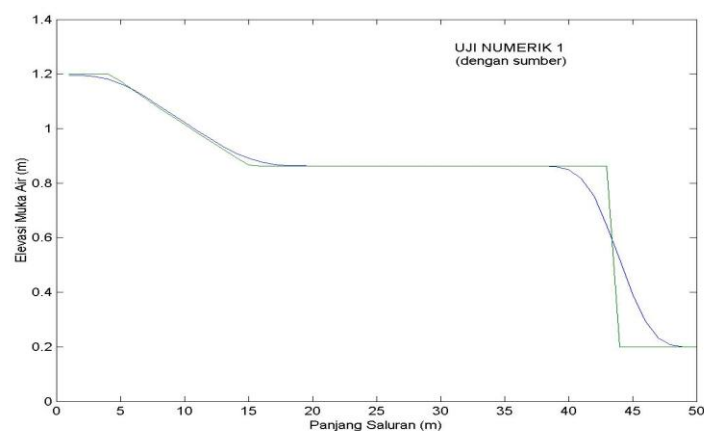
Dalam Gambar uji ketiga dihasilkan profil kedalaman dan kecepatan air. Perhitungan cara eksak menghasilkan kedalaman dan kecepatan pada bidang peralihan yang ditandai dengan notasi bintang (*), untuk kedalaman bintang (h^*) adalah 0,00095225 sedangkan kecepatan bintang (v^*) adalah 6,6654000. Pada uji ini saluran tidak kering mutlak sehingga tetap akan mempunyai kedalaman pada daerah bintang walau cukup kecil sekali hal ini membuktikan bahwa dalam kondisi saluran kering walupun tidak mutlak tetap ada kejut walupun kecil sekali.

6.1.4. Uji Keempat

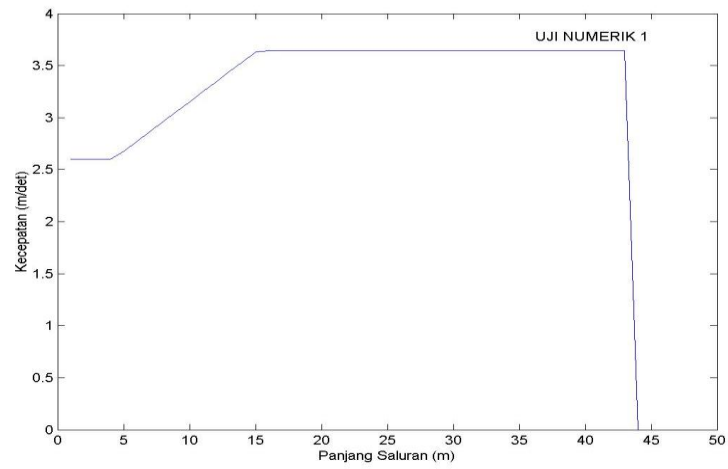
Uji ini pada prinsipnya sama dengan Uji Ketiga , hanya posisi pintu dipindah ke lebih hilir lagi. Pada uji keempat pintu bendung sebagai pemisah kedalaman air diletakkan 30 meter dari hulu, untuk kondisi kedalaman air hulu (H_{ki}) adalah 0,0000001 (tidak mutlak kering) dan dengan kecepatan aliran hulu (V_{ki}) adalah nol (diam) dan untuk kondisi kedalaman hilir (H_{ka}) 1,2 meter sedangkan kecepatan di hilir (V_{ka}) adalah nol atau pada kondisi nol pada saat ketika pintu bendung akan dibuka. Waktu pengamatan dilakukan pada saat 4 detik setelah pintu bendung dibuka secara mendadak.

Dalam Gambar uji keempat dihasilkan profil kedalaman dan kecepatan air. Pada uji keempat merupakan uji pada kondisi saluran kering pada sisi kanannya, yang mana penyelesaiannya terdiri dari gelombang mulus tunggal sisi kanan yang ditunjukkan oleh nilai eigen $\lambda_1 = u - a$. Dalam penyelesaian eksak gelombang yang muncul akan terlihat betul-betul mulus, namun dalam penyelesaian numerik agar model dapat dihitung maka dihindarkan kondisi kering mutlak (nol) atau paling tidak mempunyai nilai kedalaman walaupun sangat tipis sekali (0,0000001), sehingga secara teknis dalam perhitungan numeric akan muncul kejut walupun kecil sekali atau tidak semata-mata mulus dan ini sesuai dengan kondisi di alam bahwa kenyataannya tidak pernah ada aliran yang betul-betul mulus, sehingga akan muncul kejut walupun nilainya sangat kecil.

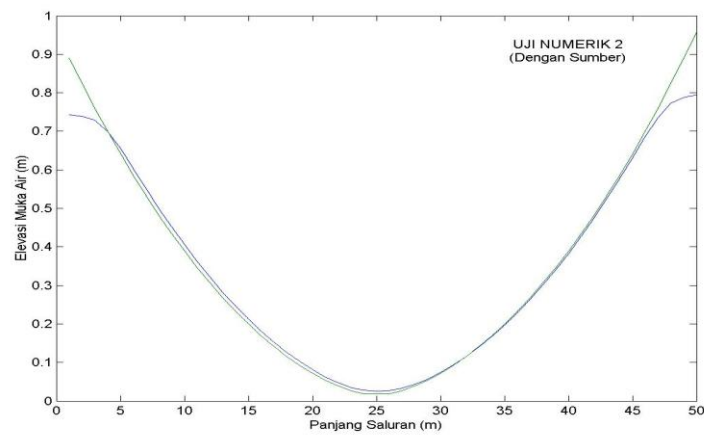
Gambar 1 a : Profil Muka Air (Uji 1)



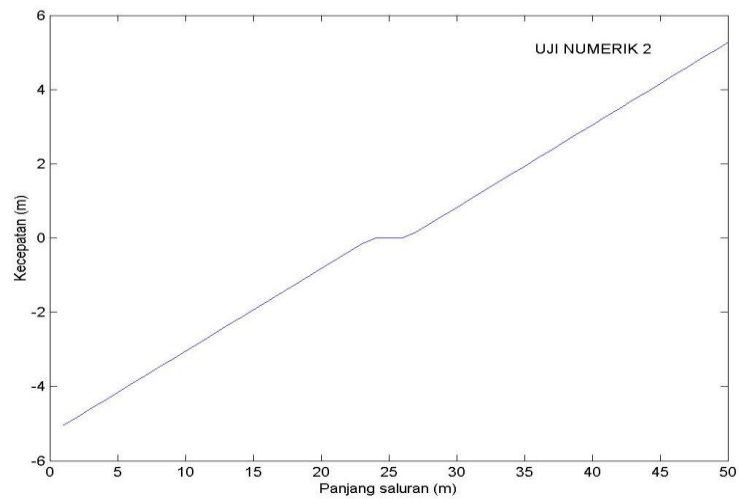
Gambar 1 b : Grafik Kecepatan Permukaan (Uji 1)



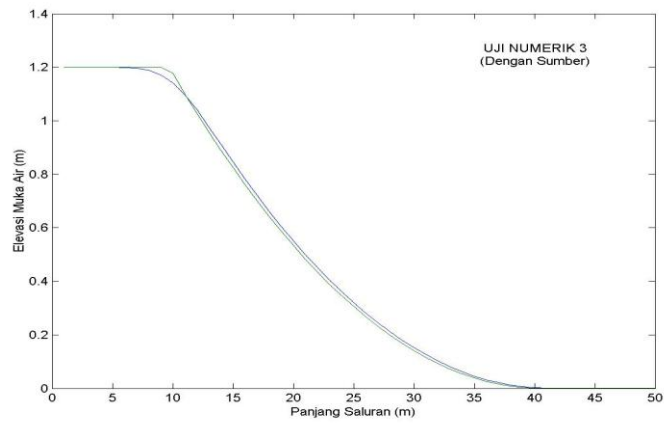
Gambar 2 a : Profil Muka Air (Uji 2)



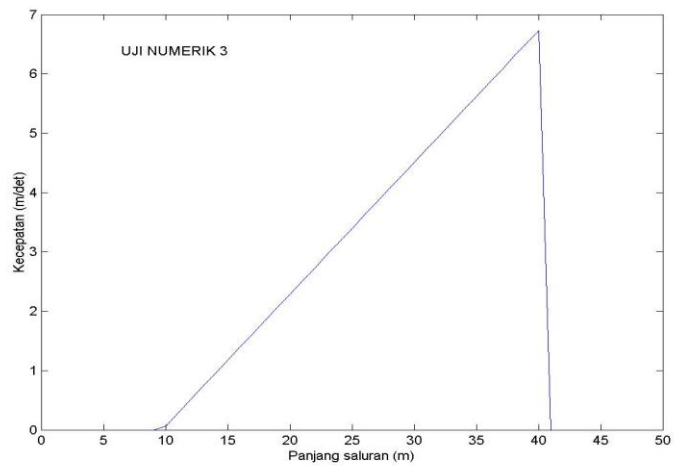
Gambar 2 b : Grafik Kecepatan Permukaan (Uji 2)



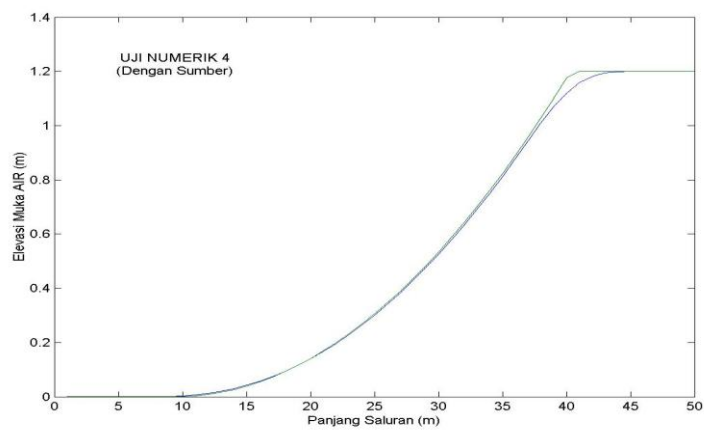
Gambar 3 a : Profil Muka Air (Uji 3)



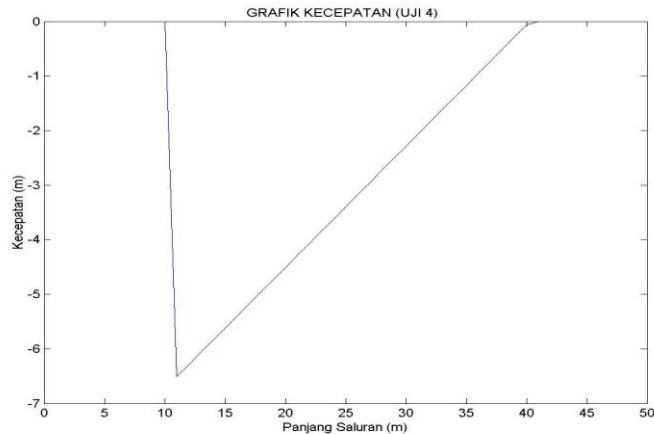
Gambar 3 b : Grafik Kecepatan Permukaan (Uji 3)



Gambar 4 a : Profil Muka Air (Uji 4)



Gambar 4 b : Grafik Kecepatan Permukaan (Uji 4)



KESIMPULAN

Dari hasil uji numerik dan uji hipotetik pada bagian depan maka didapat suatu grafik dari representasi hitungan yang muncul berdasarkan analisis model baik pada hasil model satu matra ataupun dari hasil model dua matra. Beberapa kesimpulan hasil uji numerik dan hipotetik diatas maka dapat ditulis sebagai berikut :

1. Ganjalan masalah kepada penyelesaian numerik Godunov adalah guncangan numerik terjadi pada perubahan gradient kisar kejut yang tinggi. Karena itu, suatu bagan numerik dari soal gelombang sederhana di mana penyelesaian analitik eksaknya diketahui, dijadikan batu ujian keabsahan bagan numerik yang diajukan
2. Penyusunan model dua matra berdasarkan pengembangan dari model satu matra dengan hampiran Riemann

secara utuh yaitu dengan melibatkan berbagai sumber atau tanpa sumber.

3. Bagan explicit dapat ditafsirkan sebagai pembelahan (*splitting*) dari suatu persamaan implisit menjadi persamaan eksplisit, dan dengan itu hitungannya lebih mudah. Karena hukum fisika aliran khas (*unique*), baik cara eksplisit maupun cara implisit harus menghasilkan jawaban yang setara. Namun akibat dari pembelahan ini, maka keping waktu tidak lagi bebas, melainkan ditentukan oleh ruas Δx yang harus tunduk pada kemantapan CLF (*Courant, Levy, Friedrich*). Sebaliknya, tanpa bukti, bagan eksplisit tidak terikat kaidah kemantapan CFL.