e-ISSN: 2964-2531
DOI : 10.36499/psnst.v12i1.7057
p-ISSN: 2964-5131

EVALUASI METODE KUADRATUR GAUSS, SUATU METODE UNTUK MENGHITUNG INTEGRAL TERTENTU SECARA NUMERIK

Mulyono[1*] dan Muhammad Eka Suryana[1*]
[1]Program Studi Ilmu Komputer FMIPA UNJ, Jln. Rawamangun Muka, Jakarta 13220.
*Email : mulyono@unj.ac.id, eka-suryana@unj.ac.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisa metode Kuadratur Gauss, yaitu metode untuk menghitung integral-integral tertentu secara numerik, khususnya untuk fungsi-fungsi yang rumit, diantaranya adalah metode Kuadratur Gauss dengan : 2 titik, 3 titik, 4 titik, 5 titik dan 6 titik. Faktor utama yang paling penting untuk dipertimbangkan dalam membandingkan metode-metode tersebut adalah akurasi penyelesaian numerik. Dalam penelitian ini digunakan software Microsoft Excel sebagai alat untuk membantu penghitungannya. Hasil dari penelitian ini adalah bahwa hasil integral numerik yang dihitung dengan metode Kuadratur Gauss dengan 6 titik adalah yang paling baik.

Kata kunci : *Integral Numerik, Metode Kuadratur Gauss*

1. PENDAHULUAN

Masalah yang sering dijumpai pada bidang sains dan teknik salah satunya adalah masalah untuk menghitung integral tertentu dari fungsi yang rumit atau fungsi yang ditabulasikan dan fungsi f(x) nya tidak diketahui secara eksplisit (Klusalaas, 2005 ; Munir, 2013; Sianipar, 2013). Untuk mendapatkan hasil integral dari $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$, manakala f(x) adalah fungsi yang rumit atau fungsi yang ditabulasikan, adalah sangat sulit bahkan tidak mungkin bisa diselesaikan secara analitik, sehingga diperlukan metode lain yaitu penyelesaian secara numerik atau dikenal dengan integral numerik (Conte & Boor, 1992; Munir, 2013; Won, 2005).

Untuk menghitung integral tertentu dari $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ ada banyak metode, diantaranya kelompok metode pias atau metode kuadratur yaitu : Metode Segiempat, Metode Trapesium dan Metode Titik Tengah serta kelompok metode Newton-Cotes, yaitu: Metode Trapesium dan Metode Simpson 1/3. Pada penelitian ini, yang akan dianalisa keakuratan hasil integralnya adalah metode Kuadratur Gauss dengan 2, 3, 4, 5 atau 6 titik (Triatmodjo, 1992; Steven, 2007; Mulyono & Suryana, 2021).

2. METODOLOGI

Pelaksanaan penelitian ini dilakukan dengan tahapan-tahapan sebagai berikut:

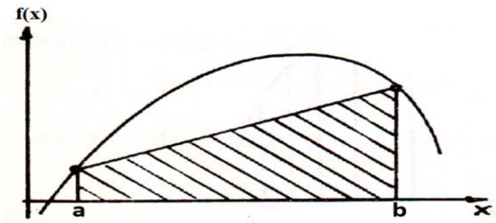
a. Menyiapkan sejumlah fungsi f(x) yang akan dihitung nilai integralnya pada suatu batas integral tertentu dengan menggunakan sejumlah metode yaitu metode: Analitik kalau memungkinkan, Kuadratur Gauss dengan 2 titik, Kuadratur Gauss dengan 3 titik, Kuadratur Gauss dengan 4 titik, Kuadratur Gauss dengan 5 titik Kuadratur Gauss dengan 6 titik.
b. Melakukan eksperimen terhadap sejumlah metode tersebut dengan menggunakan sejumlah fungsi f(x) baik yang bisa diintegralkan secara analitik ataupun tidak, dengan menggunakan batas integral yang sama, sehingga hasil integral dari semua metode tersebut bisa dibandingkan.
c. Melakukan evaluasi terhadap hasil-hasil uji coba yang dilakukan. Parameter yang digunakan untuk melakukan evaluasi kinerja dari sejumlah metode tersebut adalah akurasi penyelesaian numerik.

Pada penelitian ini akan dibahas suatu metode untuk menghitung $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$, manakala f(x) adalah fungsi yang sangat rumit untuk dihitung integralnya, yaitu metode Kuadratur Gauss.

2.1. Metode Kuadratur

Didalam suatu aturan Trapesium atau Simpson, fungsi yang diintegralkan secara numerik terdiri dari 2 bentuk yaitu tabel data dan fungsi. Didalam metode Kuadratur, khususnya metode Kuadratur Gauss, fungsi yang diintegralkan berupa fungsi.

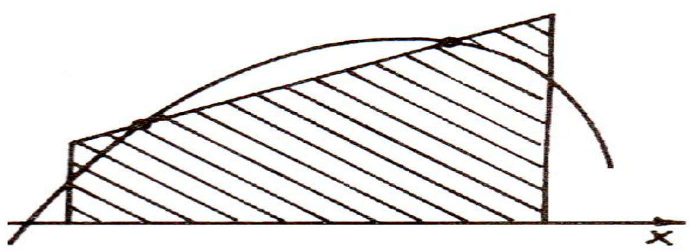
Pada aturan Trapesium dan Simpson, integral didasarkan pada nilai-nilai di ujung-ujung pias. Seperti pada gambar berikut ini: aturan Trapesium didasarkan pada luasan di bawah garis lurus yang menghubungkan nilai-nilai dari fungsi pada ujung-ujung interval integrasi.



Gambar 1. Bentuk grafis aturan Trapesium

Rumus yang digunakan untuk menghitung luasan adalah: $I = (b - a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$, a dan b merupakan batas integral dan b - a = lebar dari interval integrasi. Karena aturan Trapesium harus melalui titik-titik ujung seperti pada gambar di atas, maka rumus Trapesium memberikan kesalahan cukup besar.

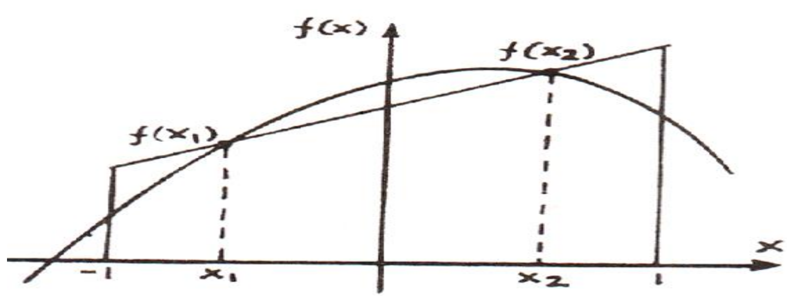
Didalam metode Kuadratur Gauss, dihitung luasan di bawah garis lurus yang menghubungkan 2 titik sembarang pada kurva. Dengan menetapkan posisi dari kedua titik tersebut secara bebas, maka akan bisa ditentukan garis lurus yang dapat menyeimbangkan antara kesalahan positif dan kesalahan negative, seperti gambar berikut ini :



Gambar 2. Bentuk grafis aturan Kuadratur Gauss

Dalam aturan Trapesium, rumus: $I = (b - a)\frac{f(a)+ f(b)}{2}$ dapat ditulis dalam bentuk : I= $c_1f(a) + c_2f(b)$, dan akan dicari koefisien c_1 dan c_2. Dalam metode Kuadratur Gauss, juga akan dicari koefisien-koefisien dari persamaan yang berbentuk I= $c_1f(x_1) + c_2f(x_2)$

Pada persamaan di atas, x_1 dan x_2 tidak tetap dan akan dicari, seperti gambar berikut ini:



Gambar 3. Integrasi Kuadratur Gauss

e-ISSN: 2964-2531
DOI : 10.36499/psnst.v12i1.7057
p-ISSN: 2964-5131

Jadi pada persamaan Kuadratur Gauss : $I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$, mengandung 4 bilangan yang tidak diketahui, yaitu c_1, c_2, x_1 dan x_2, sehingga diperlukan 4 persamaan untuk menyelesaikannya. Dengan demikian, persamaan : $I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$ dianggap memenuhi integral dari 4 fungsi berikut ini: $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ dan $f(x) = x^3$.

Sehingga didapat 4 persamaan :

$f(x)=1 \rightarrow c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 + c_2 = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2$

$f(x)=x \rightarrow c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0$

$f(x)=x^2 \rightarrow c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}$

$f(x)=x^3 \rightarrow c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$

Didapat Sistem persamaan :

$c_1 + c_2 = 2.$

$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$

$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3}$

$c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0$

Dari sistem persamaan di atas, diperoleh : $c_1 = c_2 = 1$, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dari hasil tersebut, maka menghasilkan rumus Kuadratur Gauss (tepatnya Gauss-Legendre) sebagai berikut: $I = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, yang merupakan rumus Kuadratur Gauss untuk 2 titik.

Batas integral untuk mendapatkan rumus di atas adalah x = -1 s/d x = 1, sehingga memudahkan hitungan dan membuat rumus yang didapat bisa digunakan secara umum.

Dengan melakukan transformasi, batas-batas integrasi yang lain (selain -1 dan +1) dapat dirubah ke dalam batas/bentuk tersebut. Dianggap terdapat hubungan secara linier antara variabel baru x_d dan variabel asli x sebagai berikut: $x = a_0 + a_1 x_d$.

Bila batas bawah variabel asli adalah x = a, maka untuk variabel baru (x_d), batas tersebut adalah x_d = -1(batas bawahnya), sehingga didapat : $a = a_0 + a_1(-1)$ dan bila batas atas variabel asli adalah x = b, maka untuk x_d =1(batas atasnya), didapat : $b = a_0 + a_1(1)$. Dari $a = a_0 + a_1(-1)$ dan $b = a_0 + a_1(1)$, diperoleh : $a_0 = \frac{b+a}{2}$ dan $a_1 = \frac{b-a}{2}$, sehingga didapat : $x = \frac{(b+a) + (b-a)x_d}{2}$ dan $dx = \frac{(b-a)}{2} dx_d$. $x = \frac{(b+a) + (b-a)x_d}{2}$ dan $dx = \frac{(b-a)}{2} dx_d$ dapat disubstitusikan ke dalam persamaan yang diintegralkan.

Rumus Kuadratur Gauss untuk 2 titik, dapat dikembangkan untuk n titik sebagai berikut: $I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \ldots + c_n f(x_n)$.

Nilai c dan x untuk rumus sampai dengan 6 titik, seperti pada tabel berikut ini (Triatmodjo, 1992) :

Tabel 1. Nilai c dan x pada rumus Kuadratur Gauss

Jumlah titik	Koefisien c	Variabel x
2	$c_1 = 1{,}000000000$	$x_1 = -0{,}577350269$
	$c_2 = 1{,}000000000$	$x_2 = 0{,}577350269$
3	$c_1 = 0{,}555555556$	$x_1 = -0{,}774596669$
	$c_2 = 0{,}888888889$	$x_2 = 0{,}000000000$
	$c_3 = 0{,}555555556$	$x_3 = 0{,}774596669$
	$c_1 = 0{,}347854845$	$x_1 = -0{,}861136312$

Jumlah titik	Koefisien c	Variabel x
4	$c_2 = 0{,}652145155$	$x_2 = -0{,}339981044$
	$c_3 = 0{,}652145155$	$x_3 = 0{,}339981044$
	$c_4 = 0{,}347854845$	$x_4 = 0{,}861136312$
5	$c_1 = 0{,}236926885$	$x_1 = -0{,}906179846$
	$c_2 = 0{,}478628670$	$x_2 = -0{,}538469310$
	$c_3 = 0{,}568888889$	$x_3 = 0{,}000000000$
	$c_4 = 0{,}478628670$	$x_4 = 0{,}538469310$
	$c_5 = 0{,}236926885$	$x_5 = 0{,}906179846$
6	$c_1 = 0{,}171324492$	$x_1 = -0{,}932469514$
	$c_2 = 0{,}360761573$	$x_2 = -0{,}661209386$
	$c_3 = 0{,}467913935$	$x_3 = -0{,}238619186$
	$c_4 = 0{,}467913935$	$x_4 = 0{,}238619186$
	$c_5 = 0{,}360761573$	$x_5 = 0{,}661209386$
	$c_6 = 0{,}171324492$	$x_6 = 0{,}932469514$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini akan diberikan sejumlah soal integral tertentu yang bisa diselesaikan secara analitik maupun soal integral tertentu yang cukup rumit berikut ini :

1. Hitunglah $\int_2^5 \mathbf{e^{0,1x^2}\ x\ dx}$ dengan metode analitik dan Kuadratur Gauss.
2. Hitunglah $\int_3^6 \mathbf{e^{\sqrt{0,2x}}}\ \boldsymbol{x^{2/3}(5x-3)}\mathbf{dx}$ dengan metode Kuadratur Gauss.

Untuk jawaban dari soal-soal di atas adalah sebagai berikut :

Jawaban dari soal nomor 1:

a. Jawaban secara analitik dari $\int_2^5 e^{0,1x^2}$ xdx adalah:

$$\int e^{0,1x^2} x\, dx = \int e^u\, 5\, du = 5e^u + C = 5\, e^{0,1x^2} + C$$

$$\int_2^5 e^{0,1x^2}\ x\ dx = 5\, e^{0,1x^2}\Big|_2^5 = 5\, e^{2,5} - 5\, e^{0,4} = 53{,}45334632$$

b. Jawaban secara numerik dari $\int_2^5 e^{0,1x^2}$ x dx dengan metode Kuadratur Gauss adalah :

Diketahui : batas bawah integral (a) = 2 dan batas atas integral (b) = 5. Dilakukan substitusi variabel sehingga batas integral berubah menjadi -1 sampai dengan 1 sebagai berikut : $\boldsymbol{x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2} = \frac{(5+2)+(5-2)x_d}{2} = 3,5+1,5x_d}$ sehingga dx = 1,5 dx_d

Jadi : $\int_2^5 \mathbf{e^{0,1x^2}\ x\ dx} = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{e^{0,1(3,5+1,5x_d)^2}\ (3,5+1,5x_d)1,5\ dx_d}$

$= \int_{-1}^{1} \boldsymbol{e^{0,1(3,5+1,5x_d)^2}\ (5,25+2,25x_d)dx_d}$, sehingga $\boldsymbol{f(x_d) = e^{0,1(3,5+1,5x_d)^2}(5,25+2,25x_d)}$.

- Metode Kuadratur Gauss dengan 2 titik :

  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_1) = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)}$ = f(-0,577350269)= 7,906943397

  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_2) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ = f(0,577350269) = 44,05927856

  Jadi $\int_{-1}^{1} \boldsymbol{e^{0,1(3,5+1,5x_d)^2}\ (3,5+1,5x_d)1,5\ dx_d}$ = $c_1f(x_1) + c_2f(x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ = 7,906943397 + 44,05927856 = 51,96622195, dan kesalahannya = $\frac{|53,45334632-51,96622195|}{53,45334632}$ = 2,782098 %.

e-ISSN: 2964-2531
DOI : 10.36499/psnst.v12i1.7057
p-ISSN: 2964-5131

- Metode Kuadratur Gauss dengan 3 titik :
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_1 = -0,774596669}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_1)}$ =f($\boldsymbol{-0,774596669}$)= 6,058603793
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_2 = 0}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_2)}$ = f(0) = 17,87187193
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_3 = 0,774596669}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_3)}$ = f($\boldsymbol{0,774596669}$) = 61,44937279
  Jadi $\boldsymbol{\int_{-1}^{1} e^{0,1(3,5+1,5x_d)^2}\,(3,5+1,5x_d)1,5\,dx_d}$ = $c_1f(x_1)$ + $c_2f(x_2)$ + $c_3f(x_3)$ = 0,555555556$f(x_1)$ + 0,888888889$f(x_2)$ + 0,555555556$f(x_3)$ = 53,39053985, dan kesalahannya = $\boldsymbol{\frac{|53,45334632-53,39053985|}{53,45334632}}$ = 0,11750 %.
- Metode Kuadratur Gauss dengan 4 titik :
  Untuk $x_d = x_1 = -0,861136312$, maka $f(x_d) = f(x_1)$ = f(−0,861136312)= 5,394300802
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_2 = -0,339981044}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_2)}$ = f($\boldsymbol{-0,339981044}$) = 10,96573059
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_3 = 0,339981044}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_3)}$ = f($\boldsymbol{0,339981044}$)= 30,03118839
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_4 = 0,861136312}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_4)}$ = f($\boldsymbol{0,861136312}$)= 71,40689733
  Jadi $\int_{-1}^{1} e^{0,1(3,5+1,5x_d)^2}\,(3,5+1,5x_d)1,5\,dx_d$ = $c_1f(x_1)$ + $c_2f(x_2)$ + $c_3f(x_3)$ + $c_4f(x_4)$ = 0,347854845$f(x_1)$ + 0,652145155$f(x_2)$ + 0,652145155$f(x_3)$ + 0,347854845$f(x_4)$ = 53,45161095.
  Kesalahan = $\boldsymbol{\frac{|53,45334632-53,45161095|}{53,45334632}}$ = 0,0032465 %
- Metode Kuadratur Gauss dengan 5 titik :
  Untuk $x_d = x_1 = -0,906179846$, maka $f(x_d) = f(x_1)$ = f(−0,906179846)= 5,077833532
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_2 = -0,538469310}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_2)}$ = f($\boldsymbol{-0,538469310}$) = 8,337015314
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_3 = 0}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_3)}$ = f(**0**)= 17,87187193
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_4 = 0,538469310}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_4)}$ = f($\boldsymbol{0,538469310}$) = 41,32639883
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_5 = 0,906179846}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_5)}$ = f($\boldsymbol{0,906179846}$) = 77,29301198
  Jadi $\boldsymbol{\int_{-1}^{1} e^{0,1(3,5+1,5x_d)^2}\,(3,5+1,5x_d)1,5\,dx_d}$ = $c_1f(x_1)$ + $c_2f(x_2)$ + $c_3f(x_3)$ + $c_4f(x_4)$ + $c_5f(x_5)$ = 0,236926885$f(x_1)$ + 0,47862867$f(x_2)$ + 0,568888889$f(x_3)$ + 0,47862867$f(x_4)$ + 0,236926885$f(x_5)$ = 53,45331107, dan kesalahannya = $\boldsymbol{\frac{|53,45334632-53,45331107|}{53,45334632}}$ = 0,0000659 %.
- Metode Kuadratur Gauss dengan 6 titik :
  Untuk $x_d = x_1 = -0,932469514$, maka $f(x_d) = f(x_1)$ = f(−0,932469514)= 4,901609646
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_2 = -0,661209386}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_2)}$ = f($\boldsymbol{-0,661209386}$) = 7,057737415
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_3 = -0,238619186}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_3)}$ = f($\boldsymbol{-0,238619186}$)= 12,6493834
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_4 = 0,238619186}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_4)}$ = f($\boldsymbol{0,238619186}$) = 25,63495906
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_5 = 0,661209386}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_5)}$ = f($\boldsymbol{0,661209386}$) = 50,67137355
  Untuk $\boldsymbol{x_d = x_6 = 0,932469514}$, maka $\boldsymbol{f(x_d) = f(x_6)}$ = f($\boldsymbol{0,932469514}$) = 80,97708369
  Jadi $\boldsymbol{\int_{-1}^{1} e^{0,1(3,5+1,5x_d)^2}\,(3,5+1,5x_d)1,5\,dx_d}$ = $c_1f(x_1)$ + $c_2f(x_2)$ + $c_3f(x_3)$ + $c_4f(x_4)$ + $c_5f(x_5)$ + $c_6f(x_6)$= 0,171324492$f(x_1)$ + 0,360761573$f(x_2)$ + 0,467913935$f(x_3)$ + 0,467913935$f(x_4)$ + 0,360761573$f(x_5)$ + 0,171324492$f(x_6)$= 53,45334572, dan kesalahannya = $\boldsymbol{\frac{|53,45334632-53,45334572|}{53,45334632}}$ = 0,0000011 %**.**

Jawaban dari soal nomor 2 :

Integral numerik dari $\int_3^6 e^{\sqrt{0,2x}}\,x^{2/3}(5x-3)dx$ dengan metode sebagai berikut:

Diketahui : batas bawah integral (a) = 3 dan batas atas integral (b) = 6. Dilakukan substitusi variabel sehingga batas integral berubah menjadi -1 sampai dengan 1 sebagai berikut :

$\boldsymbol{x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2} = \frac{(6+3)+(6-3)x_d}{2} = 4,5+1,5x_d}$ sehingga dx = 1,5 dx_d

Jadi : $\int_3^6 e^{\sqrt{0,2x}}\, x^{2/3}(5x-3)dx = \int_{-1}^{1} e^{\sqrt{0,2(4,5+1,5x_d)}}\,(4,5+1,5x_d)^{2/3}(5(4,5+1,5x_d)-3)1,5\,dx_d = \int_{-1}^{1} e^{\sqrt{0,9+0,3x_d}}\,(4,5+1,5x_d)^{2/3}(29,25+11,25x_d)\,dx_d$, sehingga $f(x_d) = e^{\sqrt{0,9+0,3x_d}}\,(4,5+1,5x_d)^{2/3}\,(29,25+11,25x_d)$.

- Metode Kuadratur Gauss dengan 2 titik :
  Untuk $x_d = x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, maka $f(x_d) = f(x_1) = f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ = f(-0,577350269)= 126,15574240
  Untuk $x_d = x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, maka $f(x_d) = f(x_2) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ = f(0,577350269) = 308,71859697
  Jadi $\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{0,9+0,3x_d}}\,(4,5+1,5x_d)^{2/3}(29,25+11,25x_d)\,dx_d$ = $c_1f(x_1) + c_2f(x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ = 126,15574240 + 308,71859697 = 434,87433937.
- Metode Kuadratur Gauss dengan 3 titik :
  Untuk $x_d = x_1 = -0,774596669$, maka $f(x_d) = f(x_1)$ =f($-0,774596669$) = 103,84008380
  Untuk $x_d = x_2 = 0$, maka $f(x_d) = f(x_2)$ = f(0) = 205,87745976
  Untuk $x_d = x_3 = 0,774596669$, maka $f(x_d) = f(x_3)$ = f($0,774596669$) = 349,53930502
  Jadi $\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{0,9+0,3x_d}}\,(4,5+1,5x_d)^{2/3}(29,25+11,25x_d)\,dx_d$ = $c_1f(x_1) + c_2f(x_2) + c_3f(x_3)$ = 0,555555556$f(x_1)$ + 0,888888889$f(x_2)$ + 0,555555556$f(x_3)$ = 434,87962491.
- Metode Kuadratur Gauss dengan 4 titik :
  Untuk $x_d = x_1 = -0,861136312$, maka $f(x_d) = f(x_1)$ = f($-0,861136312$)= 94,80253210
  Untuk $x_d = x_2 = -0,339981044$, maka $f(x_d) = f(x_2)$ = f($-0,339981044$) = 156,26998868
  Untuk $x_d = x_3 = 0,339981044$, maka $f(x_d) = f(x_3)$ = f($0,339981044$)= 263,50036382
  Untuk $x_d = x_4 = 0,861136312$, maka $f(x_d) = f(x_4)$ = f($0,861136312$)= 368,40343524
  Jadi $\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{0,9+0,3x_d}}\,(4,5+1,5x_d)^{2/3}(29,25+11,25x_d)\,dx_d$ = $c_1f(x_1) + c_2f(x_2) + c_3f(x_3) + c_4f(x_4)$ = 0,347854845$f(x_1)$ + 0,652145155$f(x_2)$ + 0,652145155$f(x_3)$ + 0,347854845$f(x_4)$ = 434,87964157.
- Metode Kuadratur Gauss dengan 5 titik :
  Untuk $x_d = x_1 = -0,906179846$, maka $f(x_d) = f(x_1)$ = f($-0,906179846$)= 90,27688295
  Untuk $x_d = x_2 = -0,538469310$, maka $f(x_d) = f(x_2)$ = f($-0,538469310$) = 130,84137506
  Untuk $x_d = x_3 = 0$, maka $f(x_d) = f(x_3)$ = f(0)= 205,87745976
  Untuk $x_d = x_4 = 0,538469310$, maka $f(x_d) = f(x_4)$ = f($0,538469310$) = 301,02317106
  Untuk $x_d = x_5 = 0,906179846$, maka $f(x_d) = f(x_5)$ = f($0,906179846$) = 378,45628330
  Jadi $\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{0,9+0,3x_d}}\,(4,5+1,5x_d)^{2/3}(29,25+11,25x_d)\,dx_d$ = $c_1f(x_1) + c_2f(x_2) + c_3f(x_3) + c_4f(x_4) + c_5f(x_5)$ = 0,236926885$f(x_1)$ + 0,47862867$f(x_2)$ + 0,568888889$f(x_3)$ + 0,47862867$f(x_4)$ + 0,236926885$f(x_5)$ = 434,87964166.
- Metode Kuadratur Gauss dengan 6 titik :
  Untuk $x_d = x_1 = -0,932469514$, maka $f(x_d) = f(x_1)$ = f($-0,932469514$)= 87,69140633
  Untuk $x_d = x_2 = -0,661209386$, maka $f(x_d) = f(x_2)$ = f($-0,661209386$) = 116,37329530
  Untuk $x_d = x_3 = -0,238619186$, maka $f(x_d) = f(x_3)$ = f($-0,238619186$)= 170,24716354
  Untuk $x_d = x_4 = 0,238619186$, maka $f(x_d) = f(x_4)$ = f($0,238619186$) = 245,45602429
  Untuk $x_d = x_5 = 0,661209386$, maka $f(x_d) = f(x_5)$ = f($0,661209386$) = 325,70760096
  Untuk $x_d = x_6 = 0,932469514$, maka $f(x_d) = f(x_6)$ = f($0,932469514$) = 384,39829293
  Jadi $\int_{-1}^{1} e^{\sqrt{0,9+0,3x_d}}\,(4,5+1,5x_d)^{2/3}(29,25+11,25x_d)\,dx_d$ = $c_1f(x_1) + c_2f(x_2) + c_3f(x_3) + c_4f(x_4) + c_5f(x_5) + c_6f(x_6)$= 0,171324492$f(x_1)$ + 0,360761573$f(x_2)$ + 0,467913935$f(x_3)$ + 0,467913935$f(x_4)$ + 0,360761573$f(x_5)$ + 0,171324492$f(x_6)$= 434,87964184.

e-ISSN: 2964-2531
DOI : 10.36499/psnst.v12i1.7057
p-ISSN: 2964-5131

KESIMPULAN

Dari analisis dan perhitungan di atas, didapat beberapa kesimpulan:

1. Pada soal nomor 1, yang bisa diselesaikan secara analitik, maka hasil integral dengan metode numerik yang paling mendekati hasil secara analitik adalah metode Kuadratur Gauss dengan 6 titik.
2. Berdasarkan kesimpulan nomor 1, maka hasil integral soal nomor 2 yang paling valid adalah hasil integral yang dihitung dengan metode Kuadratur Gauss dengan 6 titik.

DAFTAR PUSTAKA

Jaan Klusalaas,(2005), "Numerical methods in engineering with MATLAB", Cambridge Univ. Press.

Mulyono & Suryana, M.E. (2021), "Kajian Sejumlah Metode Untuk Menghitung Integral Tentu Secara Numerik". Prosiding Seminar Nasional Sains Dan Teknologi ke-11, Diselenggarakan oleh Fakultas Teknik Universitas Wahid Hasyim Semarang, 27 Oktober 2021 (hal. 24-31). Diakses dari *https://publikasiilmiah.unwahas.ac.id/* index.php/ PROSIDING_SNST_FT / issue/view/306/showToc.

R.H. Sianipar, (2013), " Pemrograman MATLAB dalam contoh dan penerapan", Penerbit INFORMATIKA Bandung.

S.R. Otto dan J.P. Denier, (2005), "An introduction to programming and numerical methods in MATLAB', Springer – Verlag.

Steven T.Karris, (2007), " Numerical analysis using MATLAB and Excel", Orchard Publications, California.

Triatmodjo, B.(1992). " Metode Numerik", Beta Offset, 93-102

Won Y.Yang,(2005), "Applied numerical methods using MATLAB", Wiley-Interscience, Canada.

Samuel D.Conte & Carl de Boor, (1992), " Dasar-Dasar Analisis Numerik, Suatu Pendekatan Algoritma", Penerbit Erlangga.

Rinaldi Munir, (2013), " Metode Numerik ", Informatika Bandung.